L3 MASS U1CD35 | Université Paris Diderot
Calcul différentiel | 2012 - 2013

Vendredi 18 janvier 2013

Corrigé examen final

Exercice 1. 1. Soient a et b des points fixes pour f dans E. D'après $(\star)$ appliquée à $x = a$ et $y = b$ on obtient $\|f(a) - f(b)\| \leq 0$, d'où $f(a) = f(b)$, puis finalement $a = b$.

2. (a) Appliquons $(\star)$ à $x = x_n$ et $y = x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha(\|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\|)$, soit $(1-\alpha)\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha\|x_n - x_{n-1}\|$. On obtient donc le résultat en divisant par $1 - \alpha > 0$.

(b) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en utilisant l'inégalité du (a).

(c) Puisque $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a $0 < \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$. Par conséquent, la série géométrique de terme général $(\frac{\alpha}{1-\alpha})^n \|x_1 - x_0\|$ est convergente. Par comparaison, on déduit de la question précédente que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente dans l'espace de Banach E ; elle est donc convergente.

(d) Par définition de la convergence d'une série, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, où $S_n = \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k)$. Mais d'un autre côté, on a $S_n = x_{n+1} - x_0$, donc $x_n = S_{n-1} - x_0$, par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien une suite convergente.

(c) **Attention, la relation $(\star)$ n'implique pas la continuité de** f donc on ne peut pas passer à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. En appliquant $(\star)$ à $x = x_n$ et $y = \ell$ on trouve $\|x_{n+1} - f(\ell)\| \leq \alpha(\|x_{n+1} - x_n\| + \|f(\ell) - \ell\|)$. Puisque $x_{n+1} \to \ell$ et $x_{n+1} - x_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ ceci nous donne en passant à la limite $\|\ell - f(\ell)\| \leq \alpha\|f(\ell) - \ell\|$. Comme $0 < \alpha < 1$ on en déduit que $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2. Partie (I)

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ comme fonction polynômiale en x, y et z. On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -8z \end{pmatrix}, \quad Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. En tout point (x, y, z), la matrice hessienne $Hf(x, y, z)$ est diagonale et possède une valeur propre strictement négative (-8). Ce n'est donc pas une matrice positive. Donc f n'est pas convexe.

3. Soit M un point d'extrémum local de f. Par théorème du cours, puisque $\mathbb{R}^3$ est un ouvert, si M est un point de minimum local alors $Hf(M)$ est une matrice positive. Et si M est un point de maximum local alors $Hf(M)$ est une matrice négative. Or $Hf(M)$ a deux valeurs propres de signe opposé strictement : $2 > 0$, et $-8 < 0$. Elle n'est donc ni positive, ni négative. On en déduit que f n'admet pas de point d'extrémum local.

Autre argument : si $M = (x, y, z)$ est un point d'extrémum local, c'est un point critique donc $x = z = 0$, c'est-à-dire que M est de la forme $(0, y, 0)$ pour $y \in \mathbb{R}$. Donc $f(M) = 0$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, $f(\varepsilon, y, 0) > 0$ et $f(0, y, \varepsilon) < 0$ donc M ne peut être un point d'extrémum local.

Partie (II)

4. Montrons que E est fermé dans $\mathbb{R}^3$. Posons $g(x,y,z) = x^2e^y + y^2 + z^2 - 1$. Alors $E = g^{-1}(\{0\})$. En outre, g est continue sur $\mathbb{R}^3$ (par produit et somme de fonctions continues). De là, E est fermé.

Montrons que E est borné dans $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, le caractère borné est indépendant du choix de la norme. On va montrer que $E \subset B_{\|\cdot\|_2}(0, \sqrt{e+1})$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne $\|(x,y,z)\|_2^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Soit $(x,y,z) \in E$. Puisque $x^2e^y \geq 0$ on a déjà $y^2 + z^2 \leq 1$. En particulier $y \in [-1,1]$. Puisque $x^2e^y \leq 1$, on en déduit que $x^2 \leq e^{-y} \leq e$, et finalement on a bien $x^2 + y^2 + z^2 \leq e + 1$.

5. E est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, E est donc compact. Comme f est continue sur E, on en déduit qu'elle admet un minimum global et un maximum global sur E.

6. (a) Soit $M = (x,y,z)$ un point d'extrémum global sur E. D'une part, nous avons vu que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. D'autre part, $E = g^{-1}(\{0\})$, avec g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ puisque produit et somme de fonctions C^1. Enfin, on calcule

$$\nabla g(M) = \begin{pmatrix} 2xe^{-y} \\ x^2e^y + 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Donc $\nabla g(M) = 0$ si et seulement si $M = 0 \notin E$. Par conséquent, le théorème des extrema liés s'applique : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(M) = \lambda \nabla g(M)$ soit

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x e^y \\ 0 = \lambda(x^2e^y + 2y) \\ -8z = 2\lambda z. \end{cases}$$

(b) Supposons que $x = 0$ dans le système précédent. La deuxième équation donne $y\lambda = 0$ donc $y = 0$ ou bien $\lambda = 0$. Si $y = 0$, puisque $(x,y,z) \in E$ on a $z^2 = 1$ donc $z = \pm 1$ (et $\lambda = -4$). Si $\lambda = 0$ alors la troisième équation donne $z = 0$ et, puisque $(x,y,z) \in E$ on a $y^2 = 1$ donc $y = \pm 1$. Ainsi M est bien de la forme annoncée.

(c) Supposons à présent que $x \neq 0$ dans le système précédent. Alors la première équation donne $\lambda e^y = 1$. En particulier $\lambda \neq 0$ donc la deuxième équation implique

$$x^2e^y + 2y = 0 \quad (1).$$

En outre, la dernière équation donne $z = 0$ ou bien $\lambda = -4$. Mais $\lambda = e^{-y} > 0$ donc nécessairement $z = 0$. Ainsi, puisque $(x,y,z) \in E$, on a

$$x^2e^y + y^2 = 1 \quad (2).$$

D'où, en regroupant (1) et (2), $x^2 = -2ye^{-y}$ avec $y^2 - 2y - 1 = 0$. On doit donc avoir $y \leq 0$, soit $y = 1 - \sqrt{2} = y_0$. Enfin $\lambda = e^{-y_0}$.

7. Calculons : $f(0, \pm 1, 0) = 0$, $f(0,0,\pm 1) = -4$, et enfin $f(\pm\sqrt{2|y_0|e^{|y_0|}}, y_0, 0) = 2|y_0|e^{|y_0|} > 0$.

On en déduit que $(0,0,\pm 1)$ sont les points de minimum global de f et $(\pm\sqrt{2|y_0|e^{|y_0|}}, y_0, 0)$ les points de maximum global de f sur E.

Exercice 3. Partie (I)

1. Il faut vérifier les axiomes de la norme, ce qui est laissé au lecteur qui est arrivé jusqu'ici...

2. Pour montrer que Φ est différentiable en M et calculer la différentielle au point M, calculons, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}\Phi(M+H)-\Phi(M) &= \operatorname{tr}(M+H)A - \operatorname{tr}(M)A + (M+H)^3 - M^3 \\ &= \operatorname{tr}(H)A + M^2H + MHM + HM^2 + MH^2 + HMH + H^2M + H^3 \\ &= \operatorname{tr}(H)A + M^2H + MHM + HM^2 + \|H\|\varepsilon(H),\end{aligned}$$

où $\varepsilon(H) = (MH^2 + HMH + H^2M + H^3)/\|H\|$.

Attention, le produit matriciel n'est pas commutatif !

D'une part, l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), H \mapsto \operatorname{tr}(H)A + M^2H + MHM + HM^2$ est linéaire (donc continue, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie).

D'autre part, on a bien $\varepsilon(H) \to 0$ lorsque $\|H\| \to 0$, car

$$\|\varepsilon(H)\| \leq \frac{\|MH^2 + HMH + H^2M + H^3\|}{\|H\|} \leq (3\|M\| + \|H\|)\|H\|.$$

Partie (II)

3. F_r est une partie fermée de l'espace complet $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d)$ donc par théorème (F_r, d) est une partie complète.

4. On a par inégalité triangulaire et homogénéité $\|\Phi(M)\| \leq |\operatorname{tr}(M)|\|A\| + \|M^3\|$. Puis on conclut en utilisant le fait que $|\operatorname{tr}(M)| \leq \|M\|$ et le fait que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre.

Comme $\|A\| \leq 1/2$ on a $\|\Phi(M)\| \leq \frac{1}{2}\|M\| + \|M\|^3 \leq r/2 + r^3$ pour $M \in F_r$.

Ainsi pour que $\Phi(M) \in F_r$ il suffit que $r/2 + r^3 \leq r$, c'est-à-dire que $r \leq r_0 = 1/\sqrt{2}$.

5. (a) On a par les mêmes arguments que précédemment : pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{d}\Phi(M)(H)\| \leq \|H\|\|A\| + 3\|M\|^2\|H\|$, d'où le résultat.

(b) On applique l'inégalité des accroissements finis à Φ dans le convexe F_r : pour tout $M, N \in F_r$, on a

$$\|\Phi(M) - \Phi(N)\| \leq \sup_{P \in [M,N]} \|\mathrm{d}\Phi(P)\|_{\mathrm{op}}\|M - N\| \leq \sup_{P \in F_r} \|\mathrm{d}\Phi(P)\|_{\mathrm{op}}\|M - N\|.$$

Mais d'après la question précédente, on a

$$\forall P \in F_r, \quad \|\mathrm{d}\Phi(P)\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\| + 3r^2 \leq \frac{1}{2} + 3r^2,$$

d'où le résultat.

(c) Il suffit de montrer qu'il existe $r_1 > 0$ tel que pour $r \leq r_1$, on a $1/2 + 3r^2 < 1$ donc il suffit de choisir r_1 tel que $1/2 + 3r_1^2 < 1$ soit $r_1 < 1/\sqrt{6}$.

6. D'après le théorème du point fixe de Picard, il suffit de prendre $r_2 = \min(r_0, r_1)$ pour obtenir l'existence et l'unicité du point fixe de Φ dans F_{r_2}.

Partie (III)

7. Écrivons $M = I_n + R$. En développant on trouve $\mathrm{d}\Phi(M)(H) = \operatorname{tr}(H)A + 3H + R^2H + HR^2 + 3RH + 3HR + RHR$, et donc $\|\mathrm{d}\Phi(M)(H) - 3H\| \leq \|H\|\|A\| + (6\|R\| + 3\|R\|^2)\|H\|$, d'où le résultat.

8. Puisque $\mathrm{d}\Phi(M)$ est un endomorphisme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{d}\Phi(M)(H) = 0$. Alors $\|\mathrm{d}\Phi(M)(H) - 3H\| = 3\|H\|$. Par ailleurs, d'après la question précédente pour $M \in B$ on a $\|\mathrm{d}\Phi(M)(H) - 3H\| \leq \|H\|(1/2 + 6/3 + 3(1/3)^2) = 17/6\|H\|$. Puisque $17/6 < 3$, on conclut que $H = 0$.

9. D'après 7. on a $\|\mathrm{d}\Psi(M)\|_{\mathrm{op}} \leq 17/6$ lorsque $M \in B$. Puisque B est convexe, l'inégalité des accroissements finis nous assure que pour $(M, N) \in B^2$ l'inégalité $\|\Psi(M) - \Psi(N)\| \leq 17/6\|M - N\|$ a bien lieu.

10. Soient M et N telles que $\Phi(M) = \Phi(N)$. Alors $\Psi(M) - \Psi(N) = 3(N - M)$ donc $3\|\Psi(M) - \Psi(N)\| \leq 17/6\|M - N\|$. Ainsi $M = N$.

11. Déjà, Φ est de classe C^1 car elle est polynômiale en les coefficients de M. On a vu que $\mathrm{d}\Phi(M)$ est un isomorphisme pour tout M. En outre, Φ est injective. Le théorème d'inversion globale s'applique, et la conclusion s'ensuit.