L3 MASS U1CD35 | Université Paris Diderot
Calcul différentiel | 2012 - 2013

Vendredi 18 janvier 2013 | **Examen final**

Durée : 3 heures.
Sujet comportant 3 pages.

Documents, calculettes et portables ne sont pas autorisés.
Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question de cours (4 points - aucune démonstration n'est exigée).

1. Énoncer le théorème de Heine.
2. Donner trois exemples de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soient (E, d) un espace métrique. Soient $f : E \to E$ et $f_n : E \to E$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   Donner la définition de :« $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur E ».
   Donner la définition de : « $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E ».
4. Donner un exemple de fonction continue mais non Lipschitzienne.

Exercice 1. (5 points)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : E \to E$ une application vérifiant la propriété suivante : il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\big(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|\big). \tag{$\star$}$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe dans E.
2. Le but de cette question est de montrer l'existence d'un point fixe pour f.
   Soit $x_0 \in E$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\|$.
   (b) Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \|x_1 - x_0\|.$$

   (c) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_{n+1} - x_n)$ converge.
   (d) En déduire qu'il existe $\ell \in E$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$.
   (e) En utilisant $(\star)$, montrer que $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2. (5 points) Les parties (I) et (II) sont indépendantes.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 - 4z^2$ si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Partie (I)

1. Montrer que $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.
2. f est-elle convexe ?
3. Montrer que f n'admet pas d'extrémum local sur $\mathbb{R}^3$.

Partie (II)

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 e^y + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Montrer soigneusement que E est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sur E.
6. Soit $M = (x,y,z)$ un point d'extrémum global de f sur E.
   (a) Énoncer le théorème des extrema liés au point M.
   (b) On suppose dans cette question que $M = (x,y,z)$ est un point d'extrémum global sur E qui vérifie $x = 0$.
   Montrer qu'alors $M = (0,1,0)$ ou bien $M = (0,-1,0)$ ou bien $M = (0,0,1)$ ou bien $M = (0,0,-1)$.
   (c) On suppose dans cette question que $M = (x,y,z)$ est un point d'extrémum global sur E qui vérifie $x \neq 0$.
   Montrer qu'alors $M = (-\sqrt{2|y_0|e^{|y_0|}}, y_0, 0)$ ou bien $M = (\sqrt{2|y_0|e^{|y_0|}}, y_0, 0)$, où $y_0 = 1 - \sqrt{2}$.
7. En déduire le ou les points d'extrémum global de f sur E.

Exercice 3. (8 points) Les parties (II) et (III) sont indépendantes.

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille n. Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|M\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|.$$

Partie (I)

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet dorénavant que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \|MN\| \le \|M\|\|N\|.$$

On rappelle que la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \quad \|\varphi\|_{\mathrm{op}} = \sup_{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(M)\|}{\|M\|}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| \le 1/2$. On définit l'application

$$\Phi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|) \to (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|), \quad M \mapsto \Phi(M) = \mathrm{tr}(M)A + M^3.$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est différentiable en M, de différentielle $\mathrm{d}\Phi(M)$ telle que :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{d}\Phi(M)(H) = \mathrm{tr}(H)A + M^2H + MHM + HM^2.$$

Partie (II)

Pour tout réel $r > 0$ on considère

$$F_r = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| \leq r\}.$$

3. Justifier que (F_r, d) est une partie complète de l'espace métrique $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d)$, où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.
4. Montrer que $\|\Phi(M)\| \leq \|A\|\|M\| + \|M\|^3$ et que, si $M \in F_r$, $\|\Phi(M)\| \leq (\frac{1}{2} + r^2)r$. En déduire qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $0 < r \leq r_0$ on a $\Phi(F_r) \subset F_r$.
5. (a) Montrer que $\|\mathrm{d}\Phi(M)\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\| + 3\|M\|^2$.
   (b) Montrer que, pour tout $(M,N) \in F_r^2$, $\|\varphi(M) - \varphi(N)\| \leq (\frac{1}{2} + 3r^2)\|M - N\|$.
   (c) En déduire qu'il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $0 < r \leq r_1$ l'application Φ est une contraction sur F_r.
6. Montrer qu'il existe $r_2 > 0$ tel que Φ a un unique point fixe dans F_{r_2}.

Partie (III)

7. En écrivant $M = I_n + M - I_n$, montrer que

$$\|\mathrm{d}\Phi(M) - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\| + 6\|M - I_n\| + 3\|M - I_n\|^2,$$

   où $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est l'identité de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$: $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(H) = H$.
8. Soient B la boule ouverte $B(I_n, 1/3)$ et $M \in B$. Utiliser la question précédente pour montrer que $\mathrm{d}\Phi(M)$ est un isomorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
9. On note $\Psi = \Phi - 3\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que, pour tout $(M,N) \in B^2$,

$$\|\Psi(M) - \Psi(N)\| \leq \frac{17}{6}\|M - N\|.$$

10. En déduire que Φ est injective sur B.
11. Conclure que Φ est un C^1-difféomorphisme global de B dans $\Phi(B)$.